数理解析研究所講究録
73巻 1969年 87-97

線型正作用素による函数の近似について

東北大 教養　　鈴木義也

§1. 序

線型正作用素による函数の近似については近年多くの人々によって研究されてきているが，ここでは話題を実数値連続函数 $f(x)$ を実軸上のある有限区間 $[a,b]$ 上で，ある条件をみたす線型正作用素 $L_n(f;x)$ で近似するときの局所飽和に限定する。ここに，線型作用素 $L_n(f;x)$ が正であるとは『$f(x)\geq 0$ のとき $L_n(f;x)\geq 0$』がいえることと定義する。また $g(x)\in C[a,b]$ に対して，$\|g(x)\|_{(a,b)}\equiv \max_{x\in[a,b]}|g(x)|$ と定義する。このとき局所飽和定理とは，与えられた函数 $f(x)$ に依存してきまるある近似法を $\mathbb{P}_n(f;x)$ とし，A をある条件をみたす連続函数 $f(x)$ の集合；$\varphi(x)$ を $x>0$ で定義された非増加な正値函数で，$\varphi(x)\to 0\ (x\to+\infty)$ とするとき，

『(i) $\|f(x)-\mathbb{P}_n(f;x)\|_{(a,b)}=o(\varphi(n)) \Longrightarrow \begin{cases} f(x)\text{が定数，1次函数等の} \\ \text{特殊な函数である。} \end{cases}$

(ii) $\| f(x) - \mathbb{P}_n(f;x) \|_{(a,b)} = O(\varphi(n)) \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \in A \ ((a,b)\text{の部分区} \\ \text{間}[c,d] \text{上で}) \text{である.} \end{cases}$

(iii) $f(x) \in A$ ($[a,b]$上で) $\Longrightarrow \| f(x) - \mathbb{P}_n(f;x) \|_{(c,d)} = O(\varphi(n))$.』

が成立するという形の定理のことである。このような事実が成立するとき，$\mathbb{P}_n(f;x)$なる近似法はC－空間で局所的に飽和されていて，そのクラスはA，その度合は$\varphi(n)$であるといわれる。しかし，“飽和現象”が生ずるのはある特定の近似法に対してである。

§2. 補助定理

特に次の3つの性質を有する線型正作用素を考える。即ち $x \in [a,b]$ に対して，

P_1 : $f(x)$が1次函数であるとき，$L_n(f;x) = f(x)$.

P_2 : $f(x) = Ax^2$ のとき，$[a,b]$で一様に

$$L_n(f;x) - f(x) = \frac{A\psi(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) .$$

ここに，$\psi(x)$は連続な2次の導函数を有し，(a,b)上では0とはならない函数とする（L_nの形に依存する）。

P_3 : 1より大なる正整数mが存在して，$[a,b]$で一様に

$$L_n\{(t-x)^{2m};x\} = o\left(\frac{1}{n}\right) .$$

このような$L_n(f;x)$に対しては，P. P. Korovkin [2]の定理から性質P_1とP_2によって，$[a,b]$における$L_n(f;x)$の$f(x)$への一様収束性がでるし，収束の度合については性質P_3によって，

R.G. Mamedov [4] と F. Schurer [5] の一般的な定理により次の命題が成立する。

補助定理 1. $L_n(f;x)$ を性質 P_1, P_2, P_3 をみたす線型正作用素とするとき，$f(x)\in C^{(2)}[a,b]$ に対して，

$$L_n(f;x)-f(x)=\frac{\psi(x)f''(x)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ x\in[a,b].$$

補助定理 2. 上の補助定理 1 と同じ仮定の下に，$f(x)\in C^{(2)}[a,b]$ に対して，$[a_1,b_1]\ (\subset(a,b))$ で一様に，

$$L_n(f;x)-f(x)=\frac{\psi(x)f''(x)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

§ 3. 基本定理

先ず，$0\leqq a<b\leqq R$ なる実数値 a, b, R が与えられたとき $a<a_1<a_2<\alpha<\beta<b_2<b_1<b$ となるように a_1, a_2, α, β, b_2, b_1 を任意に定め，次の函数の族 $\mathfrak{U}$ を導入する。

$$\mathfrak{U}\equiv\{u(x)=\psi(x)g(x),\ x\in[0,R] : g(x)\in C^{(2)}[0,R],\ \text{かつ}\ (\alpha,\beta)\ \text{の外では}\ 0\ \text{である。}\}$$

次に，$f(x)\in C[a,b]$ と $L_n(f;x)$ に対して，汎函数 $A_n(f)$ を次のように定義する。

$$\text{(1)}\qquad A_n(f)=2\sum_{na<k<bn}\frac{L_n(f;\frac{k}{n})-f(\frac{k}{n})}{\psi(\frac{k}{n})}u\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=2\sum_{na_1<k<b_1n}\left[L_n\left(f;\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]g\left(\frac{k}{n}\right).$$

定理1. $L_n(f;x)$ は $f(x)\in C[a,b]$ に対して定義される線型正作用素で，性質 P_1，P_2，P_3 をみたすものとする。このとき，

[I]. ある絶対定数Kが存在して，任意の $g(x)\in C[a,b]$ に対して

$$|A_n(g)| \leqq K\|g\|_{(a,b)}$$

であり，更に，

(2) $$|L_n(f;x)-f(x)| < \frac{M\psi(x)}{2n},\ x\in[a,b],\ (n=1,2,\cdots).$$

であるとき，$[a,b]$ にて $f'(x)\in Lip_M 1$.

[II]. [I]の仮定に加えて，$[a_1,b_1]$ の殆んどすべての点で，

$$L_n(f;x)-f(x)=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成立すれば，$f(x)$ は $[a_1,b_1]$ で1次函数である。

[III]. $f'(x)\in Lip_M 1$ が $[a_1,b_1]$ でいえるとすれば，$[a_2,b_2]$ で一様に，

$$|L_n(f;x)-f(x)| < \frac{M\psi(x)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成立する。

この事実を簡単に，

$$L.\,Sat.\,[L_n]=[f'\in Lip_M 1,\ n^{-1},\ linear,\ \psi(x)]$$

とかくことにする。

3.1. 定理1の[I]の証明

最初に，任意の $g(x)\in C[a,b]$ 及び $u(x)\in \mathfrak{U}$ に対して，

(3) $$\lim_{n\to\infty} A_n(g)=\int_a^b g(x)u''(x)\,dx$$

を示す。

そのために先ず，$g(x)\in C^{(2)}[a,b]$ と仮定すると，性質 P_1，P_2，P_3 及び補助定理2により，$[a_1,b_1]$ で一様に

$$(4)\qquad L_n(g;x)-g(x)=\frac{\psi(x)g''(x)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が任意の $g(x)\in C^{(2)}[a,b]$ に対して成立する．(1)，(4)から

$$A_n(g)=\frac{1}{n}\sum_{na_1<k<nb_1} g''\left(\frac{k}{n}\right)u\left(\frac{k}{n}\right)+o(1)$$

$$\to\int_a^b g''(x)u(x)\,dx\quad(n\to\infty)$$

であり，これは(3)と同じである。更に，$C^{(2)}[a,b]$ は $C[a,b]$ で稠密であり，仮定から定数 K が存在して任意の $g(x)\in C[a,b]$ に対して，

$$|A_n(g)|\leqq K\,\|g\|$$

であるから，(3)はすべての $g(x)\in C[a,b]$ に対して成立する。一方，$A_n(f)$ を次のように変形することができる。

$$(5)\qquad A_n(f)=\int_a^b u(x)\,d\lambda_n(x),$$

$$\lambda_n(x)=2\sum_k\frac{L_n(f;\frac{k}{n})-f(\frac{k}{n})}{\psi(\frac{k}{n})},$$

ここに，総和 $\sum$ の k は $a<\frac{k}{n}<x$ なるすべての k についてとられる。このときもしも $f(x)$ が(2)を $[a,b]$ でみたすならば，$\lambda_n(x)$

の全変分は MR をこえず，$|\lambda_n(x)-\lambda_n(y)|$ は MRn^{-1} に $[x,y]$ の内部にある点 $k\cdot n^{-1}$ の個数を乗じたものをこえない。よって，Helly の定理により，部分列 $\{\lambda_{n_p}(x)\}$ が存在して，$[a,b]$ で有界変分函数 $\lambda(x)$ に収束し，

$$\lim_{p\to\infty} A_{n_p}(f) = \int_a^b u(x)\,d\lambda(x) \tag{6}$$

である。(3)，(6) により，任意の $u(x)\in\bar{U}$ に対して，

$$\int_a^b f(x)u''(x)\,dx = \int_a^b \Lambda(x)u''(x)\,dx$$

ここに，$\Lambda(x)$ とは $\lambda(x)$ の不定積分である。よって，g, h をある定数とするとき，$f(x)=\Lambda(x)+g\cdot x+h$ が $x\in[a,b]$ に対して成立する。したがって，$\lambda(x)$ の定義から，$\lambda(x)\in \mathrm{Lip}_M 1$ は明らかであるから，[I] をうる。

3.2. 定理 1 の [III] の証明

仮定から，$t, x\in[a_2, b_2]$ に対して，

$$\left|f(t)-f(x)-(t-x)f'(x)\right| = \left|\int_x^t [f'(y)-f'(x)]\,dy\right| \leqq \frac{1}{2}M(t-x)^2$$

更に，x に関して一様に

$$L_n\{(t-x)^2;x\} = L_n(t^2;x)-x^2 = \frac{\psi(x)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

であるから

$$|L_n(f;x)-f(x)| = |L_n\{f(t)-f(x)-(t-x)f'(x);x\}|$$

$$\leqq L_n\{|f(t)-f(x)-(t-x)f'(x)|\,;x\}$$
$$\leqq \frac{M}{2}L_n\{(t-x)^2;x\}=\frac{M}{2}\cdot\frac{\psi(x)}{n}+o(\frac{1}{n})$$

が $x\in[a_2,b_2]$ に関して一様に成立する。よって，[II]をうる。

3.3. 定理1の[III]の証明

(2)がいえるから，[I]の結果により，$f'(x)$ は絶対連続，即ち $f''(x)$ は $[a_1,b_1]$ の殆んどすべての点で存在する。補助定理1により，

(7) $$\lim_{n\to\infty} n\{L_n(f;x)-f(x)\}=\frac{\psi(x)f''(x)}{2}, \quad a.e.\ x\in[a_1,b_1]$$

性質 P_3 と(7)から，

$$\frac{1}{2}\psi(x)f''(x)=0 \qquad a.e.\ x\in[a_1,b_1]$$

ところが，$[a_1,b_1]$ 上では $\psi(x)\neq 0$ であるから，

$$f''(x)=0 \qquad a.e.\ x\in[a_1,b_1]$$

よって，$f'(x)$ の連続性により $f(x)$ は $[a_1,b_1]$ で1次函数である。

§4. 応用例

4.1. 一般化された Baskakov の作用素 M_n の定義

補助函数として次の性質を有する函数列 $\{\varphi_n(y)\}$ を定義する。

1). $[0,\infty)$ で Taylor 展開可能である，

2). $\varphi_n(0)=1$，

3). $(-1)^k\varphi_n^{(k)}(x)\geqq 0$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots)$，$x\in[0,\infty)$，

4). $-\varphi_n^{(k)}(x)=n\,\varphi_{n+c}^{(k-1)}(x)$ $(k=1,2,\cdots)$，$x\in[0,\infty)$，

ここに，cはある整数とする。

このとき，$x\in[0,\infty)$に対して，$M_n(f;x)$を

$$(8)\qquad M_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{k!}x^k f\left(\frac{k}{n}\right),\ (n=1,2,\cdots)$$

と定義すると，これは$f(x)\in C[0,R]$（Rは任意に固定された正数）で，かつ(R,∞)で0であるすべての函数に対して意味をもつ。

注意1．(8)で$\varphi_n(y)=(1-y)^n$，$c=-1$とおくと，Bernstein多項式

$$(9)\qquad B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

となり，$\varphi_n(y)=e^{-ny}$，$c=0$とおくと，Szászの作用素

$$(10)\qquad S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{k!}(nx)^k$$

をうる。更に，$\varphi_n(y)=(1+y)^{-n}$，$c=1$のときはBaskakov作用素

$$(11)\qquad V_n(f;x)=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

になる。

4.2. $M_n(f;x)$による漸近公式

定理2．$f(x)\in C^{(2)}[a,b]$（$0\leqq a<b\leqq R$）に対して，

$$M_n(f;x)=f(x)+\frac{f''(x)}{2}\cdot\frac{x(1+cx)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ x\in[a,b]$$

更に，これは任意に固定された部分区間 $[a_1, b_1]$ $(a<a_1<b_1<b)$ 上で一様になりたつ。

証明．直接の計算により，$M_n(1;x)=1$，$M_n(t;x)=x$，$M_n(t^2;x)=x^2+x(1+cx)\cdot n^{-1}$ であり，かつ $[a,b]$ 上で一様に，

$$M_n\{(t-x)^4;x\}=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

であるから，補助定理1と2により，定理2をうる。

系1．(E.V. Voronovskaja) $f(x)\in C^{(2)}[a,b]$ $(0\leqq a, b\leqq 1)$ のとき

$$B_n(f;x)=f(x)+\frac{f''(x)}{2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x\in[a,b]$$

系2．(O. Szász) $f(x)\in C^{(2)}[a,b]$ $(0\leqq a<b\leqq R)$ に対して

$$S_n(f;x)=f(x)+\frac{f''(x)}{2}\cdot\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x\in[a,b]$$

系3．(V.A. Baskakov[1]) $f(x)\in C^{(2)}[a,b]$ $(0\leqq a<b\leqq R)$ のとき

$$V_n(f;x)=f(x)+\frac{f''(x)}{2}\cdot\frac{x(1+x)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x\in[a,b]$$

4.3. $M_n(f;x)$ による局所飽和

この節では，簡単のために $C[a,b]$ $(0\leqq a<b\leqq R,\ R\geqq 1)$ 上で考え，更に $M_n(f;x)$ が以下の条件 (12)，(13)，(14) をみたすときのみをあつかう。

$$(12)\qquad \frac{n\,p_{n+c,l}}{p_{n,l}}=\frac{lc+n}{cx+1},$$

(13) $\displaystyle\int_0^{E(c)} p_{n,\ell}(x)\,dx = \frac{1}{n-c}\,,\quad \int_0^{E(c)} x\,p_{n,\ell}(x)\,dx = \frac{\ell+1}{(n-c)(n-2c)}\,,$

(14) $\displaystyle\sum_{n\alpha \leqq \ell \leqq n\beta} \int_R^{E(c)} x^i p_{n,\ell}(x)\,dx = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (i=0,\,1)\,,$

ここに，$\begin{cases} p_{n,\ell}(x) = (-1)^\ell \dfrac{\varphi_n^{(\ell)}(x)}{\ell!} x^\ell\,, \quad E(1)=E(0)=\infty\,, \\ E(c) = \dfrac{5c^2-c-2}{2c(c-1)} \quad (c \neq 0,\,1 \text{ のとき}) \end{cases}$.

定理3．$C[a,b]$で定義された，(12)，(13)，(14)の性質をもつ$M_n(f;x)$に対して，

$$L\cdot Sat\cdot[M_n] = [f'(x) \in Lip_M 1,\ n^{-1},\ linear,\ x(1+cx)]\,.$$

系4．(G. G. Lorentz [3]) (9)の作用素に関して，

$$L\cdot Sat\cdot[B_n] = [f'(x) \in Lip_M 1,\ n^{-1},\ linear,\ x(1-x)]\,.$$

系5．(10)の作用素について，

$$L\cdot Sat\cdot[S_n] = [f'(x) \in Lip_M 1,\ n^{-1},\ linear,\ x]\,.$$

系6．(11)の作用素に対して，

$$L\cdot Sat\cdot[V_n] = [f'(x) \in Lip_M 1,\ n^{-1},\ linear,\ x(1+x)]\,.$$

注意2．定理1を定理3の証明に応用する際に，任意の$f(x) \in C[a,b]$に対して，$|A_n(g)| \leqq K\|g\|$となる定数Kの存在を示す

必要があるが，そのためには極めて煩雑な計算を要すので，省略する。（詳細については文献[6]，[7]を参照のこと。）

文献

[1] V. A. Baskakov, Doklady Akad. Nauk, 113 (1957), 249–251.

[2] P. P. Korovkin, Linear operators and approximation theory, Delhi, 1960.

[3] G. G. Lorentz, Proc. of the Conference at Oberwolfach, 1963, 200–207.

[4] R. G. Mamedov, Doklady Akad. Nauk, 128 (1959), 471–474.

[5] F. Schurer, Indagationes Math., 25 (1963), 313–327.

[6] Y. Suzuki, Tôhoku Math. Journ., 19 (1967), 429–453.

[7] Y. Suzuki and K. Ikeno, Tôhoku Math. Journ., 20 (1968), 214–233.